

Polyèdres en Lego

Résumé

Pourquoi on peut réaliser les solides de Platon et pas ceux d'Archimède?

On utilisera les formules suivantes pour passer de la longueur du côté c à celle de l'apothème a , n représente le nombre de côté.

$$a = \frac{c}{2 \tan \frac{180}{n}} \quad ; \quad c = 2a \tan \frac{180}{n}$$

On notera c et a pour le polygone bleu, c' et a' pour le polygone rouge. Pour tous les polygones $c = 56 \text{ mm}$ et $a' = a + 8 \text{ mm}$.

Le but est de trouver c' pour chaque polygone.

1 Le triangle

On calcule l'apothème du triangle bleu :

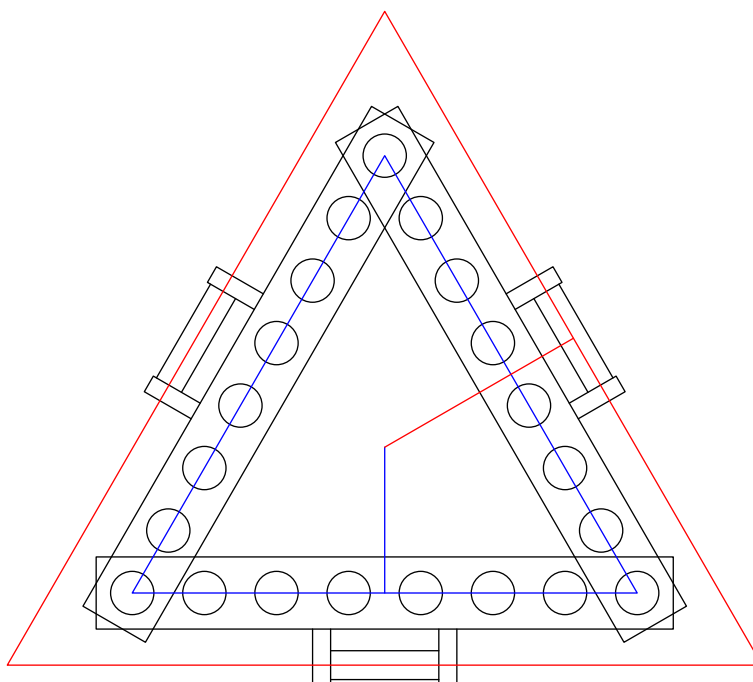
$$\begin{aligned} a &= \frac{56}{2 \tan \frac{180}{3}} \\ &= \frac{28}{\tan 60} \\ &= \frac{28}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{28\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Celle du triangle rouge est égal à :

$$a' = \frac{28\sqrt{3}}{3} + 8$$

On peut calculer la longueur du côté du triangle rouge :

$$\begin{aligned}
 c' &= 2 \left(\frac{28\sqrt{3}}{3} + 8 \right) \tan \frac{180}{3} \\
 &= \left(\frac{56\sqrt{3}}{3} + 16 \right) \tan 60 \\
 &= \left(\frac{56\sqrt{3}}{3} + 16 \right) \sqrt{3} \\
 &= 56 + 16\sqrt{3} \\
 &\approx 83,713
 \end{aligned}$$



2 Le carré

On calcule l'apothème du carré bleu :

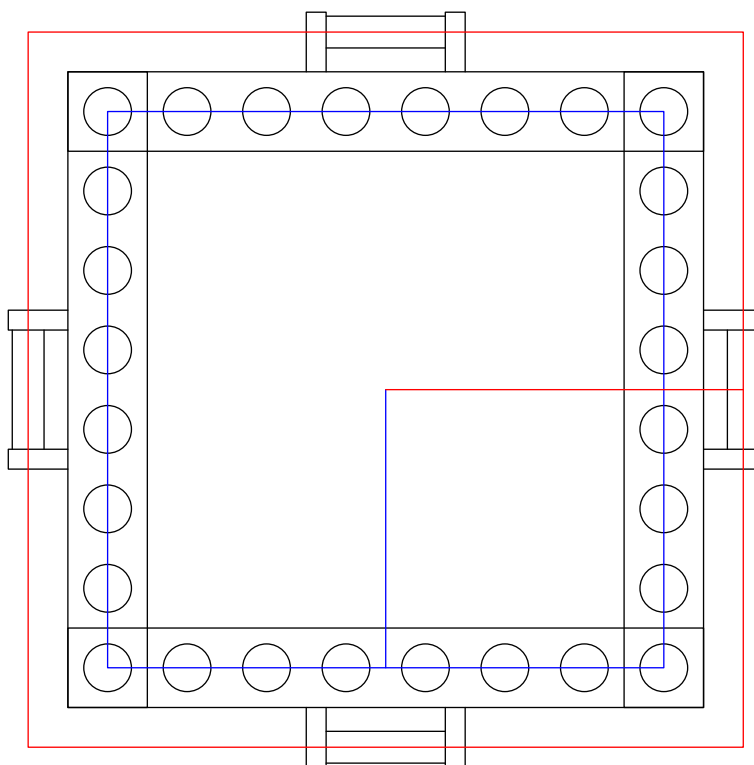
$$\begin{aligned}
 a &= \frac{56}{2 \tan \frac{180}{4}} \\
 &= \frac{28}{\tan 45} \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

Celle du carré rouge est égal à :

$$\begin{aligned} a' &= 28 + 8 \\ &= 36 \end{aligned}$$

On peut calculer la longueur du côté du carré rouge :

$$\begin{aligned} c' &= 2 \times 36 \times \tan \frac{180}{4} \\ &= 72 \tan 45 \\ &= 72 \end{aligned}$$



3 Le pentagone

On calcule l'apothème du pentagone bleu :

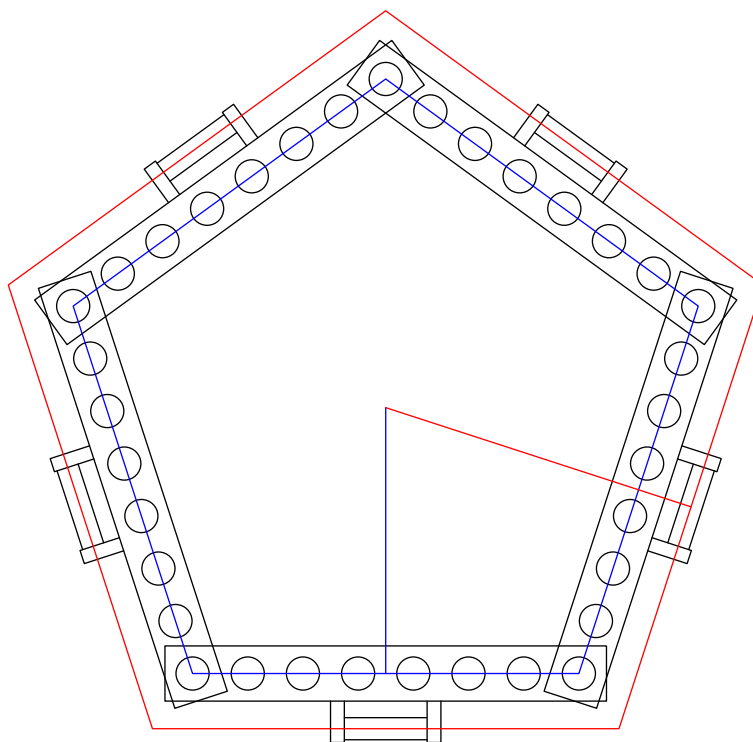
$$\begin{aligned} a &= \frac{56}{2 \tan \frac{180}{5}} \\ &= \frac{28}{\tan 36} \end{aligned}$$

Celle du pentagone rouge est égal à :

$$a' = \frac{28}{\tan 36} + 8$$

On peut calculer la longueur du côté du pentagone rouge :

$$\begin{aligned} c' &= 2 \left(\frac{28}{\tan 36} + 8 \right) \tan \frac{180}{5} \\ &= \left(\frac{56}{\tan 36} + 16 \right) \tan 36 \\ &= 56 + 16 \tan 36 \\ &= 56 + 16\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \\ &\approx 67,625 \end{aligned}$$



4 L'hexagone

On calcule l'apothème de l'hexagone bleu :

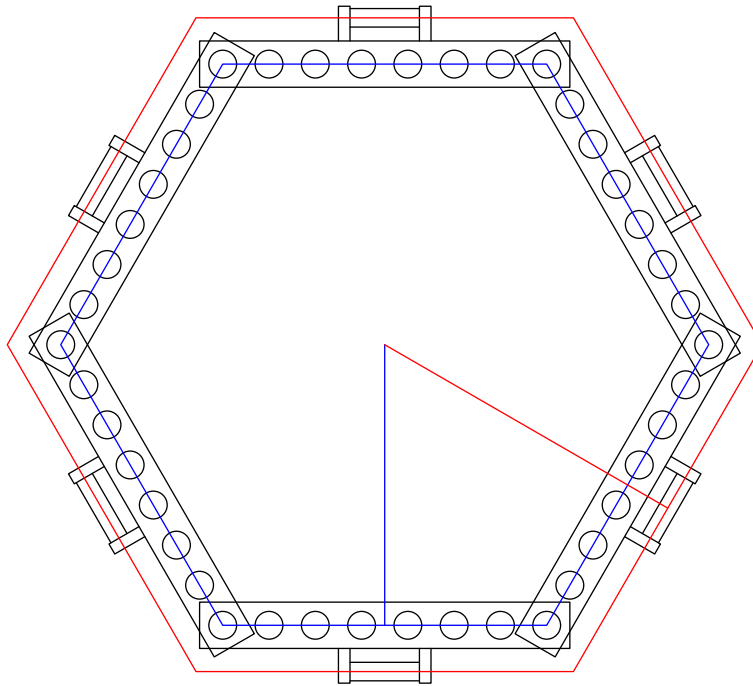
$$\begin{aligned} a &= \frac{56}{2 \tan \frac{180}{6}} \\ &= \frac{28}{\tan 30} \\ &= \frac{28}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= 28\sqrt{3} \end{aligned}$$

Celle de l'hexagone rouge est égal à :

$$a' = 28\sqrt{3} + 8$$

On peut calculer la longueur du côté de l'hexagone rouge :

$$\begin{aligned} c' &= 2 \left(28\sqrt{3} + 8 \right) \tan \frac{180}{6} \\ &= \left(56\sqrt{3} + 16 \right) \tan 30 \\ &= \left(56\sqrt{3} + 16 \right) \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= 56 + 16 \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\approx 65,238 \end{aligned}$$



Au final chaque polygone donne une longueur de l'arête du polyèdre différente. Il est donc impossible de construire les solides d'Archimède avec ce système.